МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД

из математике

<Број e>

Ученик

<Маша Кундачина>
одељење 4е

Ментор

Никола Митриновић

Београд, јун 2021.

Садржај

1 Увод **4**

2 Историја броја e пре Ојлера **4**
2.1 Логаритми 4
2.2 Бернули и сложене камате 6
2.3 Проблем ланчанице 6
2.4 Роџер Коутс и број e 7

3 Коначно, Леонард Ојлер **7**
3.1 Историја броја e кроз Ојлерове радове 7
3.2 Ојлерова формула 9

4 Извођење броја е, ирационалност, трансцендентност **9**
4.1 Извођење 9
4.2 Ирационалност 10
4.3 Трансцендентност 11
4.3.1 Додатак 13

5 Закључак **15**

Предговор

Са бројем e се сусретне већина средњошколаца. У програму за Математичку гимназију овај број се често појављује у задацима, у трећем и нарочито четвртом разреду. Његове основне особине су дакле познате онима који су се мало више бавили математиком од онога што је предвиђено у плану и програму за гимназије. На интернету су доступни разни видеи и чланци на ову тему и када се само мало дубље уђе у материју примећује се колико се e често спомиње.

Покушала сам да у овом раду теми приђем на мало другачији начин са жељом да на једно место скупим информације о овој теми које су мени биле интересантне а које се ретко налазе све на једном месту. Међутим, како то бива, када сам кренула да мало истражујем схватила сам колико то није једноставно. Рад који се налази пред вама јесте само малени део приче која окружује број e.

1 Увод

У овом раду бавићемо се једном од најзначајнијих математичких константи - бројем e. Како је сама тема броја веома опширна, ми ћемо се овде бавити само историјом откривања овог броја и неким његовим особинама.

У другом поглављу ћемо кренути од Непиера и његовог револуционарног открића логаритама, а потом пратећи проток времена видети и како се полако 17-им веком приближавало овом броју: видећемо проблем сложене камате Јакоба Бернулија, потом наградни проблем ланчанице и на крају ћемо поменути Роџера Коутса и његов допринос истраживању броја e.

У трећем поглављу ћемо се бавити Ојлером и његовим радовима, односно његовим открићима везаним за број e.

У четвртом поглављу ћемо видети једно извођење броја e, као и доказ да је e ирационалан и трансцендентан.

На крају рада се налази литература.

2 Историја броја e пре Ојлера

Број e, или како се некад зове, Ојлерова константа, је добио име по математичару Ојлеру о коме ће даље у раду бити речи. У овој глави ћемо видети који су математичари учествовали у откривању броја e. Пре Ојлера, Јакоб Бернули је путем лимеса дефинисао e.

Ојлер је значајан зато што је био први који се издашно бавио бројем e, односно његовим особинама, лимесима и функцијом e^x.

2.1 Логаритми

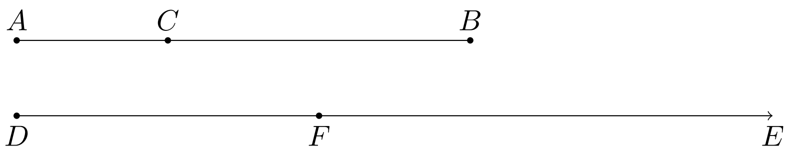
У 17. веку дошло је до великог развоја математике. Многи математичари и научници су допринели овом развитку и дошло је до великих открића у разним пољима математике, која су тако постала отворена за даља и дубља истраживања. Овде ћемо, како бисмо приказали важност овог периода, напоменути да је у 17. веку Кеплер објавио своје законе планетарног кретања и да су крајем века Њутн и Лајбниц поставили основе математичке анализе. Колико је овај период био битан и плодотворан, показују имена великана науке који су тада живели: Галилеј, Ферма, Паскал, Декарт...

Откриће с почетка 17. века које је у великоме помогло при гломазним израчунавањима тог доба јесте откриће логаритама Џона Непиера. Операција сабирања је једноставнија од операције множења и самим тим је мања вероватноћа да се при сабирању погреши. Управо на овом принципу су базирани логаритми, односно операција логаритмовања. Претпоставља се да је идеју за своје откриће Непиер пронашао у тада новооткривеној формули за производ синуса:

$$sinAsinB = \frac{1}{2}\left\{cos(A-B) - cos(A+B)\right\}.$$

Логаритме је дефинисао на следећи начин: Посматрајмо дуж AB и полуправу DE (слика доле). Нека тачке C и F почну да се крећу истовремено; тачка C брзином која је пропорционална остатку пута, односно дужини CB, а тачка F се креће константном, почетном брзином. Тада је DF логаритам дужине CB, односно за $DF = x$ и $CB = y$,

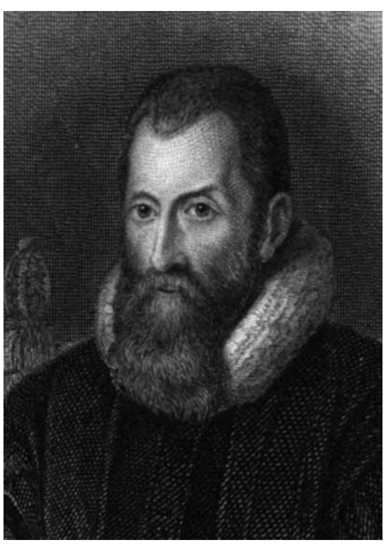
$$x = Nap\ log\ y.$$



Помоћу данашњег знања, тада недоступног Непиеру, добија се да је

$$Nap\ log\ y = 10^7\ log_{1/e}\ (y/10^7).$$

Године 1614. је објављена Непиерова брошура *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, или *Опис дивног канона логаритама* и ово је за сада први познати текст у коме се имплицитно појављује број e. Овај текст, преведен на енглески (оригинал је био на латинском) је био објављиван 1616. и 1618. У верзији из 1618, налази се додатак у коме су били рачунати логаритми са основом e. Верује се да овај додатак није написао Непиер, већ Вилијам Отред.



Слика 1: Џон Непиер

Слика 2: Mirifici logarithmorum canonis descriptio

Логаритме које је дефинисао данас носе назив Непиерови логаритми, и умеју често да се погрешно поистовете са природним логаритмима (логаритми са основом e). Овде ћемо кратко напоменути да је Бригз заједно са Непиером преформулисао логаритме и тако су настали логаритми са основом 10 - данашњи природни логаритми. На идеју логаритама није дошао само Непиер; швајцарски механичар Бурги је независно од Непиера направио таблицу логаритама и објавио је 1620. године.

2.2 Бернули и сложене камате

Јакоб Бернули је 1689. објавио *Tractatus de seriebus infinitis*, где се позабавио следећим проблемом сложене камате: Замислимо да смо од банке узели 1 динар и да банка наплаћује камату од 100% једном годишње. На крају године бисмо морали да платимо $1 \cdot (1 + 1) = 2$ динара. Шта се дешава ако банка наплаћује камату два пута годишње, по 50%? Тада бисмо на крају године морали да платимо $1 \cdot (1 + \frac{1}{2}) \cdot (1 + \frac{1}{2}) = 2.25$ динара. Слично, ако би банка наплаћивала камату свака три месеца, односно четири пута годишње, на крају године бисмо морали да платимо $1 \cdot (1 + \frac{1}{4}) \cdot (1 + \frac{1}{4}) \cdot (1 + \frac{1}{4}) \cdot (1 + \frac{1}{4})$, односно $1 \cdot (1 + \frac{1}{4})^4 = 2.44140625$ динара. Закључујемо да што чешће банка наплаћује камату, то већи износ плаћамо на крају године. У општем случају, ако банка n пута годишње наплаћује камату, износ који плаћамо на крају године је $1 \cdot (1 + \frac{1}{n})^n$ динара.

Бернули је закључио да је лимес $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ коначан; ово је био први пут у историји да је број дефинисан као лимес. Преко биномне теореме је развио $(1+\frac{1}{n})^n$ и тако добио да је вредност ове константе између 2 и 3.

2.3 Проблем ланчанице

Галилео Галилеј је био први који је представио проблем ланчанице, односно поставио питање који је математички облик ланца при дејству силе Земљине теже (слика 3). Галилеј је претпостављао да такав ланац образује параболу, међутим ту претпоставку је оборио Јоахим Јунг 1669. Године 1690. је Јакоб Бернули предложио да овај проблем постане наградног типа. У периоду од 1690-1691. до решења су дошли Јакоб и Јохан Бернули, Лајбниц, Хајгенс и Њутн. Решење овог проблема се путем данашње нотације записује овако:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = acosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Слика 3: ланчаница

Из писама размењених између Лајбница и Хајгенса у вези са овим проблемом, може се закључити да је Лајбниц био свестан константе e; он ју је назвао b : *"b estant une grandeur constante, dont le logarithme est 1, et le logarithme de 1 estant 0"* (b је константна вредност чији је логаритам једнак 1 и за који је $log 1 = 0$). Међутим, није пронађен никакав писани доказ у коме је Лајбниц ову константу израчунао.

2.4 Роџер Коутс и број e

Једна од познатих и веома значајних формула која се приписује Ојлеру, јесте формула за представљање комплексног броја: $e^{ix} = cosx + isinx$. Оно што је мање познато, јесте да је Роџер Коутс, енглески математичар који је блиско сарађивао са Њутном, био онај који је дошао до формуле $ix = log(cosx + isinx)$, из које се даље долази до претходно наведене, Ојлерове формуле.

3 Коначно, Леонард Ојлер

Слика 4: Леонард Ојлер

Леонард Ојлер је био Швајцарски математичар 18-ог века. Написао је многобројне радове из области математике и природних наука. Његов рад је од важности у скоро свакој грани математике. Када је у старости ослепео, наставио је да се бави математиком и нимало није умањио своју учинковитост. Број e је по њему добио име - Ојлеров број, иако се у литератури, нарочито британској, може наићи и на назив Непиерова константа.

3.1 Историја броја e кроз Ојлерове радове

Први пут се број e појавио пред јавности 1736, у Ојлеровој *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, и наставља да се појављује у Ојлеровим артиклима у периоду од 1747-1751. Заправо, ако посматрамо рад Ојлера, он је број e користио и раније у својим радовима: 1727. и 1731. Међутим, ови текстови су били заметнути негде, међу гомилом Ојерових радова и тек су објављени 1862, односно 1843. У овом раду написаном 1727, када је Ојлер имао само 20 година, налази се прва забележена појава броја e у Ојлеровом раду.

Године 1748. је објављен Ојлеров *Introductio in analysin infinitorum*, односно *Увод у анализу бесконачних величина.* Како бисмо дочарали важност ове књиге, поменућемо да је Карл Бојерс[1], у једном од својих предавања упоредио Еуклидове *Елементе* и Ојлеров *Introductio*, назвавши *Елементе* најзначајнијим уџбеником античког доба, а *Introductio* најзначајнијим уџбеником модерног доба. Између осталог, Ојлер се овде позабавио бројем e, његовим особинама и функцијом e^x.

Сада ћемо видети како је у овој књизи Ојлер дефинисао број e. Дат је следећи развој логаритамске функције за произвољну основу a:

$$log(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...\right). \tag{1}$$

Приметимо како је запис који је он тада користио, исти као запис који користимо данас, осим што се ознака $log(1+x)$ не односи на логаритам са основом десет, већ на логаритам са произвољном основом. Након проучавања овог развоја за $a = 1$ и $a = 10$, Ојлер је посматрао развој за који је $k = 1$. Претходно је дао израз за развој основе a:

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + ..., \tag{2}$$

и убацивши $k = 1$ у (2), добио је израз:

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1^2}{1\cdot 2} + \frac{1^3}{1\cdot 2\cdot 3} + ...$$

Преко овог израза је израчунао 23 децимале константе a, односно да је $a = 2.71828182845904523536028...$ Потом је, зарад концизности, природним логаритмима, односно онима који одговарају развоју за $k = 1$, доделио симбол e коме одговара ред

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + ...$$

Односно, Ојлер нам је дао формулу

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ...$$

Термин *природни логаритми* се највероватније први пут појављује у књизи *Logarithmotechnia* (1668.), математичара Николауса Меркатора, где он преко биномне формуле развија $ln(1+x)$ и тај развој данас носи назив Меркаторов развој:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... \tag{3}$$

Ојлер је у својој књизи користио назив природни логаритам и израчунао је природне логаритме бројева 1,2,...10 на 25 децимала.

[1] Carl Benjamin Boyer(1906-1976.), амерички историчар науке

3.2 Ојлерова формула

Као што смо поменули у претходној глави, Ојлерова формула гласи:

$$e^{ix} = cosx + isinx.$$

За $x = \pi$ ова формула има облик

$$e^{i\pi} = -1,$$

односно

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{4}$$

Формула (4) у себи спаја важне математичке константе e, π, имагинарну јединицу i и неутрале за сабирање и множење, 0 и 1. Ова формула се често сматра најлепшом формулом у математици.

4 Извођење броја е, ирационалност, трансцендентност

4.1 Извођење

Овде ћемо преко лимеса дефинисати број e.

Посматрајмо низ

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

и докажимо да је он конвергентан. Посматрајмо заједно са низом (a_n) и низ (b_n) са општим чланом

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Ако докажемо да постоји $\lim_{n\to\infty} b_n$, биће

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty} b_n}{\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

па ће постојати и $\lim_{n\to\infty} a_n$ и оба лимеса ће имати исту вредност. Сада наводимо теорему коју ћемо да искористимо.

Теорема 4.1. *Ако је низ реалних бројева (a_n) опадајући и ограничен одоздо, тада је тај низ конвергентан.*

Дакле, сада желимо да покажемо да је низ (b_n) опадајући. Имамо да је

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1}}{(n-1)^n(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}.$$

Применом Бернулијеве неједнакости добијамо да је

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2-1},$$

па је

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} > \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{n}{n^2}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1} = 1,$$

то јест, $b_{n-1} > b_n$ за све $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, односно низ (b_n) је опадајући.

Сада преостаје да покажемо да је (b_n) ограничен одоздо. Сви чланови низа (b_n) су позитивни, па је овај низ ограничен нулом. Међутим, низ се може и прецизније ограничити. Применом Бернулијеве неједнакости добијамо

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1+\frac{n+1}{n} > 2.$$

Дакле, овиме смо доказали да је низ (b_n) конвергентан. Одатле важи да је и низ

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

конвергентан.

Дефинишемо $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Како је за свако n, $a_n < e < b_n$, можемо лако израчунати број e са произвољном тачношћу.

4.2 Ирационалност

Сада ћемо показати да је e ирационалан, односно да је његов децимални запис бесконачан и није периодичан.

Подсетимо се да важи: $e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ односно $e = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...$
Означимо сада са $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$.
Одавде важи да је $0 < e-S_n = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+... = \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+...\right) < \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+1)}+...\right)$. Користећи се својством збира геометријског реда, односно да за $|q|<1$ важи $b+bq+bq^2+... = \frac{b}{1-q}$, имамо да је $\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+1)}+...\right) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!\cdot n}$. Дакле, добили смо да је $0 < e-S_n < \frac{1}{n!\cdot n}$, односно,

$$0 < n!(e-S_n) < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Теорема 4.2. *Број e је ирационалан.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Дакле e је рационалан, те га можемо записати као $\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$ и нека су p и q узајамно прости. Изаберимо било који природан број n већи од q. Како је $n > 1$, $\frac{1}{n} < 1$. Из (5) имамо да је $0 < n!(e - S_n) < \frac{1}{n} < 1$, одакле важи да $n!(e - S_n)$ није природан број (не постоји природан број између 0 и 1).
Израз $n!(e - S_n)$ можемо записати као $n!(\frac{p}{q} - S_n) = n! \cdot \frac{p}{q} - n!(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}) = \frac{n!}{q} \cdot p - (n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + ... + \frac{n!}{n!})$. Како смо изабрали $n > q$ то $q | n!$ па је $\frac{n!}{q}$ природан, те је и $\frac{n!}{q} \cdot p$ природан број. Дакле, $n!(\frac{p}{q} - S_n)$ је природан број. Контрадикција. □

4.3 Трансцендентност

Године 1682. је Лајбниц први искористио термин трансцендентност, а Ојлер је онај који је трансцендентне бројеве дефинисао на начин на који се и данас дефинишу:

Дефиниција 4.3. *Алгебарски број је реалан или комплексан број за који постоји полином n-тог степена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_k \in \mathbb{Q}$, чији је он корен. Реални бројеви који нису алгебарски зову се трансцендентни бројеви.*

Постојање трансцендентних бројева доказао је Лијувил[2] 1844, а седам година касније је и конструисао један трансцендентан број:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0.110001000000000000000001000...$$

Први број који није за то наменски конструисан, а за који је доказано да је трансцендентан јесте управо број e. Трансцендентност броја e је први доказао Чарлс Хермит током 1873. Наредне године је Георг Кантор доказао да алгебарских бројева има пребројиво бесконачно много а трансцендентних непребројиво много. Фердинанд фон Линдеман се ослања на Хермитов рад и 1882. доказује да је за сваки алгебарски број b, различит од нуле, e^b трансцендентан. Како је $e^{i\pi} = -1$, одавде следи да је π трансцендентан.

Сада ћемо приказати један доказ трансцендентности броја e који се налази у књизи математичара Херныштајна [3].
Прво наводимо Лагранжову теорему о средњој вредности коју ћемо користити даље у доказу.

Теорема 4.4. *Нека је функција $g : [a, b] \to \mathbb{R}$:*

1. *непрекидна у свим тачкама сегмента $[a, b]$;*
2. *диференцијабилна у свим тачкама интервала (a, b).*

Тада постоји тачка $c \in (a, b)$, таква да је

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a).$$

[2] Joseph Liouville(1809-1882.), француски математичар и инжењер
[3] Israel Nathan Hernstein - Topics in Algebra

Овде напоменимо да се тачка c из интервала (a, b) може представити и као $a+\theta(b-a)$ за $\theta \in (0,1)$.

Ради лакшег разумевања наредног доказа, неке кораке смо прескочили. Они се могу наћи на крају рада, у поглављу Додатак.

Број e је трансцендентан.

Доказ. Користићемо стандардну ознаку $f^{(i)}(x)$ да означимо i-ти извод функције f, као и ознаке $f'(x)$, $f''(x)$ за први и други извод функције f.

Претпоставимо да је $f(x)$ полином r-тог степена са реалним коефицијентима. Нека је $F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + ... + f^{(r)}(x)$. Даље, $\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}f(x)$ (доказ погледати под ставком 1 у поглављу Додатак).

Ако у Лагранжову теорему уврстимо $g(x) = e^{-x}F(x)$ на интервалу $[x_1, x_2]$ где је $x_1 = 0$ и $x_2 = k$ и k је прозивољан природан број, добијамо $e^{-k}F(k) - F(0) = -e^{-\theta_k \cdot k}f(\theta_k k)k$ где је θ_k из интервала $(0,1)$ и зависи од k. Множењем ове релације са e^k добијамо $F(k) - F(0)e^k = -e^{(1-\theta_k)\cdot k}f(\theta_k k)k$. Ово експлицитно записујемо:

$$\begin{aligned}
F(1) - eF(0) &= -e^{(1-\theta_1)}f(\theta_1) = \epsilon_1 \\
F(2) - e^2F(0) &= -e^{2(1-\theta_2)}f(2\theta_2) = \epsilon_2 \\
&\vdots \\
F(n) - e^nF(0) &= -ne^{n(1-\theta_n)}f(n\theta_n) = \epsilon_n
\end{aligned} \tag{6}$$

Сада, претпоставимо супротно од онога што желимо да докажемо, односно да је e алгебарски. То значи да он задовољава неку једначину облика

$$c_ne^n + c_{n-1}e^{n-1} + ... + c_1e + c_0 = 0, \tag{7}$$

где су $c_0, c_1, ..., c_n$ цели бројеви и можемо без умањења општости рећи да је $c_0 > 0$. Сада ћемо у релацији (6) прву једначину помножити са c_1, другу са c_2 и тако даље. Сабирањем тих једначина добијамо следећи израз:
$c_1F(1) + c_2F(2) + ... + c_nF(n) - F(0)(c_1e + c_2e^2 + ... + c_ne^n) = c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + ... + c_n\epsilon_n$. Сад из једначине (7) имамо да је $c_1e + c_2e^2 + ... + c_ne^n = -c_0$, те ову претходу једначину можемо једноставније записати:

$$c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + ... + c_nF(n) = c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + ... + c_n. \tag{8}$$

Претходна дискусија се односила на произвољну функцију $f(x)$, сада ћемо ово горе наведено применити на специфичан полином, који је конструисао Хермит,

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p...(n-x)^p.$$

Овде је p било који прост број за који важи $p > n$ и $p > c_0$ (такав прост број увек постоји). Ако развијемо овај полином, односно измножимо све заграде, f постаје:

$$f(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{a_0x^p}{(p-1)!} + \frac{a_1x^{p+1}}{(p-1)!} + ... + \frac{1}{(p-1)!}x^{(n+1)p-1},$$

где су $a_0, a_1 ...$ цели бројеви. Како је $f(x)$ полином r-тог степена, то је заправо $r = (n+1)p-1$.

За $i \geq p$, $f^{(i)}(x)$ је полином чији су коефицијенти дељиви са p (погледати Додатак, ставка 2). Дакле, за сваки цео број j, $f^{(i)}(j)$ за $i \geq p$ је цео број који је дељив са p.

Из тога како смо дефинисали $f(x)$ можемо приметити да он има p-тоструке нуле у тачкама $x = 1, 2, ..., n$. Одавде, у тачкама $j = 1, 2, ..., n$ $f(j) = 0, f'(j) = 0, f''(j) = 0, ..., f^{(p-1)} = 0$. Сада, $F(j) = f(j) + f'(j) + f''(j) + ... + f^{(p)} + ... + f^{(r)}$ односно $F(j) = f^{(p+1)} + ... + f^{(r)}$ а то је цео број дељив са p.

Посматрајмо $F(0)$: у тачки $x = 0$ $f(x)$ има $p-1$-тоструку нулу, односно $f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(p-2)}(0) = 0$. За $p \geq i$ $f^{(i)}(0)$ је цео број дељив са p. Даље, $f^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ а како је p прост и већи од n онда $p \nmid (n!)^p$. Дакле $F(0)$ је цео број и није дељив са p. Како је $c_0 > 0$ и $p > c_0$ то $p \nmid c_0F(0)$. Важи да $p \mid F(1), p \mid F(2) ... p \mid F(n)$, одакле закључујемо да је $c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n)$ цео број који није дељив са p.

Из (7) имамо да је $c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + ... + c_nF(n) = c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + ... + c_n\epsilon_n$.. За ϵ_i важи: $\epsilon_i = -ie^{i(1-\theta_i)}f(i\theta_i)$, односно

$$\epsilon_i = \frac{-e^{i(1-\theta_i)}(1-i\theta_i)^p \dots (n-i\theta_i)^p(i\theta_i)^{p-1}i}{(p-1)!},$$

за $0 < \theta_i < 1$. Одакле,

$$|\epsilon_i| < e^n \frac{n^p(n!)^p}{(p-1)!}.$$

За $p \to \infty$,

$$\frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} \to 0,$$

(доказ у Додатку ставка 3) што значи да можемо изабрати такав прост број, који је већи и од n и од c_0, за који ће важити $|c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + ... + c_n\epsilon_n| < 1$. Међутим $c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + ... + c_n\epsilon_n = c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + ... + c_nF(n)$ па мора бити цео број, а како је његова апсолутна вредност мања од 1 то мора да бити $c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + ... + c_n\epsilon_n = 0$. Дакле, $c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + ... + c_nF(n) = 0$; ово је међутим немогуће пошто знамо да $p \nmid (c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + ... + c_nF(n))$, а $p \mid 0$. Ова контрадикција произилази из претпоставке да је e алгебарски, дакле, e је трансцендентан. □

Трансцендентност броја повлачи и његову ирационалност, тако да се преко овог доказа може показати и да је e ирационалан.

4.3.1 Додатак

Ради лакшег разумевања доказа трансцендентности броја e, прескочили смо неке ставке у доказу. У доказу је било напоменуто на које делове доказа се то односи и ти прескочени кораци се могу наћи овде.

1. $\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = F(x) \cdot \frac{d}{dx}e^{-x} + e^{-x}\frac{d}{dx}F(x) = F(x) \cdot (-e^{-x}) + e^{-x}(f(x) + f'(x) + f''(x) + ... + f^{(r)})'$. Како је $f(x)$ полином r-тог степена то следи $\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = e^{-x}(f'(x) + f''(x) + ... + f^{(r)} - F(x)) = e^{-x} \cdot (-f(x))$, односно $\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}f(x)$.

2. Као што смо већ навели

$$f(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{a_0x^p}{(p-1)!} + \frac{a_1x^{p+1}}{(p-1)!} + ... + \frac{1}{(p-1)!}x^{(n+1)p-1}.$$

Посматрајмо шта се дешава за $i = p$, доказ је аналоган за $i > p$. Користимо познато својство извода полинома, тј. да је $(x^{\alpha})^{(m)} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot ... \cdot (\alpha - m)x^{\alpha - m}$ за $m \leq \alpha$. Одавде, $(\frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1})^{(p)} = 0$, а код свих осталих сабирака степен је већи од p, па ће због горе наведеног својства извода полинома сви они бити дељиви са p.

3. $0 < \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} = e^n n(n!) \frac{(n \cdot n!)^{p-1}}{(p-1)!} = e^n n(n!) \frac{n \cdot n!}{1} \cdot \frac{n \cdot n!}{2} \cdot ... \cdot \frac{n \cdot n!}{n \cdot n!} \cdot \frac{n \cdot n!}{n \cdot n! + 1} \cdot ... \cdot \frac{n \cdot n!}{(p-1)!}$,

   а што је мање од $e^n n \cdot n! \cdot \frac{n \cdot n!}{1} \cdot \frac{n \cdot n!}{2} \cdot ... \cdot \frac{n \cdot n!}{n \cdot n!} \cdot \left(\frac{n \cdot n!}{n \cdot n! + 1}\right)^{(p-1)! - n \cdot n!}$.

   Како је $\lim_{p \to \infty} e^n n \cdot n! \cdot \frac{n \cdot n!}{1} \cdot \frac{n \cdot n!}{2} \cdot ... \cdot \frac{n \cdot n!}{n \cdot n!} \cdot \left(\frac{n \cdot n!}{n \cdot n! + 1}\right)^{(p-1)! - n \cdot n!} = 0$, то преко Теореме два полицајца добијамо да је $\lim_{p \to \infty} \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} = 0$.

5 Закључак

У овом раду бавили смо се бројем e.

У другој глави рада бавили смо се тиме како су математичари у 17-ом веку дошли до броја e.

Потом смо у трећој глави видели где и како се број e појављивао у Ојлеровом раду. Навели смо и Ојлерову формулу.

У четвртој глави смо видели једно извођење броја e, као и доказ да је e ирационалан и трансцендентан.

Захвалнице

Овде бих желела да се захвалим свом ментору, Николи Митриновићу, на свој помоћи коју ми је пружио у току израде рада.

Желела бих да се захвалим и својој разредној, Снежани Јелић, за сву подршку и све њене савете које ми је несебично пружала протекле четири године.

Литература

[1] https://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/napiers-e

[2] Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics* RINEHART and company, inc, New York(1956.)

[3] Зоран Каделбург, Владимир Мићић, Срђан Огњановић, Анализа са алгебром 3. уџбеник са збирком задатака за 3. разред Математичке гимназије, Круг, Београд (2007.)

[4] http://www.cs.toronto.edu